

Л 3. Понятие вектора. Прямоугольная и полярная системы координат в пространствах. Проекция вектора на оси. Линейное пространство. Размерность и базис линейного пространства

Определение. Вектором называется отрезок с выбранным направлением или направленный отрезок. Вектор с началом в точке A и с концом в точке B обозначается через $\vec{AB}$, кроме того, вектор можно обозначать одним символом, например $\vec{a}$.

Вектор, у которого начало совпадает с его концом, называется нулевым вектором и обозначается через $\vec{0}$. Длина отрезка, изображающего вектор $\vec{a}$, называется модулем этого вектора и обозначается $|\vec{a}|$. Векторы $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \dots, \vec{a}_n$, параллельные одной прямой называются коллинеарными. Нулевой вектор считается коллинеарным любому вектору.

Два вектора $\vec{a}$ и $\vec{b}$ считаются равными, если они равны по модулю, коллинеарны и одинаково направлены. Из этого определения следует, что при параллельном переносе вектор не меняется, поэтому в качестве начала вектора можно выбрать любую точку.

Линейными операциями над векторами называются умножение вектора на число и сложение векторов.

Определение. Произведением вектора $\vec{a}$ на число α называется такой вектор $\alpha \vec{a}$, что выполняются три условия.

1) $|\alpha \vec{a}| = |\alpha| |\vec{a}|$; 2) $\alpha \vec{a} \parallel \vec{a}$; 3) Вектор $\alpha \vec{a}$ сонаправлен вектору $\vec{a}$, если $\alpha > 0$ и направлен в противоположную сторону, если $\alpha < 0$.

Определение. Суммой векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$, исходящих из одной точки, называется вектор, совпадающий с диагональю параллелограмма, образованного векторами $\vec{a}$ и $\vec{b}$, исходящий из той же точки. Если векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ не исходят из одной точки, то их начала необходимо с помощью параллельного переноса перенести в одну точку. Это определение называется правилом параллелограмма. При сложении большого числа векторов удобнее пользоваться следующим определением, равносильным предыдущему.

Суммой векторов $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \dots, \vec{a}_k$, у которых начало $\vec{a}_i$ вектора совпадает с концом $\vec{a}_{i-1}$ ($i = 2 \div k$), является вектор, соединяющий начало вектора $\vec{a}_1$ с концом вектора $\vec{a}_k$.

Эти линейные операции над векторами обладают следующими свойствами.

$$\mathbf{1.} \ 1 \cdot \vec{a} = \vec{a}; \quad \mathbf{2.} \ 0 \cdot \vec{a} = \vec{0}; \quad \mathbf{3.} \ \alpha(\beta \vec{a}) = (\alpha\beta) \vec{a}; \quad \mathbf{4.} \ (\alpha + \beta) \vec{a} = \alpha \vec{a} + \beta \vec{a};$$

$$5. \vec{a} + \vec{b} = \vec{b} + \vec{a}; \quad 6. \left(\vec{a} + \vec{b} \right) + \vec{c} = \vec{a} + \left(\vec{b} + \vec{c} \right); \quad 7. \alpha \left(\vec{a} + \vec{b} \right) = \alpha \vec{a} + \alpha \vec{b}.$$

Операция разности векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ сводится к двум линейным операциям $\vec{a} - \vec{b} = \vec{a} + (-1)\vec{b}$, однако часто удобнее пользоваться следующим специальным определением, равносильным вышеприведённому.

Определение. Разностью векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$, исходящих из одной точки называется вектор, соединяющий конец вектора $\vec{b}$ с концом вектора $\vec{a}$ и направленный в сторону конца вектора $\vec{a}$.

Определение. Линейной комбинацией векторов $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \dots, \vec{a}_n$ с коэффициентами $C_1, C_2, \dots, C_n$ называется вектор $C_1 \vec{a}_1 + C_2 \vec{a}_2 + \dots + C_n \vec{a}_n$.

Эта комбинация обладает двумя основными свойствами.

1) Если векторы $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \dots, \vec{a}_n$ коллинеарны некоторой прямой, то любая их линейная комбинация будет коллинеарной той же прямой. Векторы $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \dots, \vec{a}_n$ называются компланарными, если они лежат в одной плоскости или в параллельных плоскостях.

2) Если векторы $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \dots, \vec{a}_n$ компланарны некоторой плоскости, то любая их линейная комбинация компланарна той же плоскости.

Определение. Векторы $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \dots, \vec{a}_n$ называются линейно зависимыми, если существуют такие числа $C_1, C_2, \dots, C_n$, не все равные нулю, что $C_1 \vec{a}_1 + C_2 \vec{a}_2 + \dots + C_n \vec{a}_n = 0$.

В противном случае векторы $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \dots, \vec{a}_n$ называются линейно независимыми.

Определение. Совокупность n линейно независимых векторов называется базисом.

Множество всех плоских или пространственных векторов, в которых определены операции сложения векторов и умножение вектора на число, являются простейшими примерами векторного пространства.

Определение. Множество векторов, в котором определены операции сложения векторов и умножения вектора на число, удовлетворяющее приведенным выше семи свойствам называется векторным пространством. Оказывается, что в любом векторном пространстве всегда можно выбрать несколько векторов, из которых с помощью линейных комбинаций однозначно можно получить любой вектор этого пространства и которые являются базисными.

Определение. Любой ненулевой вектор $\vec{e}$ на прямой называется базисным вектором этой прямой. Любая пара неколлинеарных векторов

$\{\vec{e}_1, \vec{e}_2\}$ плоскости называется базисом этой плоскости. Любая тройка некопланарных векторов $\{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3\}$ называется базисом пространства.

Декартова система координат, базис которой ортонормирован, называется прямоугольной системой координат.

Полярная система координат определена, если задана точка O называемая полюсом, и исходящий из полюса луч l , которой мы назовем полярной осью.

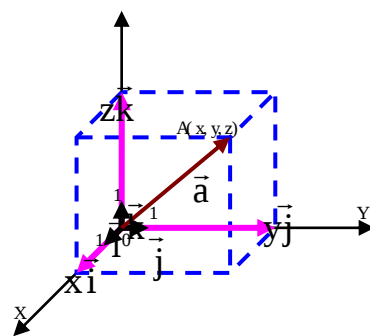
Декартовы координаты точки выражаются через ее полярные координаты

$$x = r \cos \varphi, \quad y = r \sin \varphi.$$

Определение. Коэффициенты линейной комбинации базисных векторов, выражающие вектор $\vec{a}$ на прямой, в плоскости или в пространстве называются координатами вектора $\vec{a}$ в данном базисе. Вектор, лежащий на прямой, имеет одну координату x , на плоскости – две координаты x, y ; в пространстве – три координаты x, y, z . Векторы удобно отождествлять с координатами в некотором выбранном базисе. Так, вектор $\vec{a}$ в пространстве записывают в виде: $\vec{a} = (x, y, z)$.

Теорема. При сложении векторов их соответствующие координаты складываются, при умножении вектора на число все его координаты умножаются на это число.

Пусть в пространстве имеется прямоугольная декартова система координат $Oxyz$. С ней связан стандартный базис из единичных взаимно перпендикулярных векторов, расположенных вдоль осей Ox, Oy, Oz . Эти базисные векторы обозначаются через $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$.



Определение. Вектор, начало которого находится в начале координат, а конец в точке A , т.е. вектор $O\vec{A}$, называется радиус-вектором точки A . Если (x, y, z) – координаты точки A в системе $Oxyz$, то радиус-вектор $O\vec{A}$ можно записать в виде $O\vec{A} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$. Поэтому координаты точки $A(x, y, z)$ в системе $Oxyz$ и вектора $O\vec{A}$ в базисе $\{\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\}$ – это одни и те же числа.

Теорема. Пусть в декартовой системе координат $Oxyz$ заданы две точки $A(x_A, y_A, z_A)$ и $B(x_B, y_B, z_B)$, тогда в базисе $\{\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\}$ вектор $\vec{AB}$ имеет координаты $((x_B - x_A), (y_B - y_A), (z_B - z_A))$.

Теорема. Пусть вектор $\vec{a}$ имеет координаты x, y, z в базисе $\{\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\}$, тогда $x = \text{PR}_{Ox} \vec{a}$, $y = \text{PR}_{Oy} \vec{a}$, $z = \text{PR}_{Oz} \vec{a}$.

Определение. Проекцией вектора $\vec{a}$ на ненулевой вектор $\vec{b}$ (обозначение $\text{PR}_{\vec{b}} \vec{a}$) называется его проекция на ось L , проведенная через вектор $\vec{b}$.

Теорема 2. Расстояние между точками $A(x_A, y_A)$ и $B(x_B, y_B)$ на плоскости Oxy находится по формуле $|AB| = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2}$.

Теорема 3. Расстояние между точками $A(x_A, y_A, z_A)$ и $B(x_B, y_B, z_B)$ в пространстве $Oxyz$ находится по формуле

$$|AB| = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2 + (z_B - z_A)^2}.$$

Пример. Пусть $A(1, 1, 1)$, $B(2, 3, -1)$. Найдём $|AB|$.

$$|AB| = \sqrt{(2-1)^2 + (3-1)^2 + (-1-1)^2} = \sqrt{9} = 3.$$

Определение. Разделить отрезок AB в отношении λ ($\lambda > 0$) это значит найти на нём такую точку M , что $\frac{|AM|}{|MB|} = \lambda$.

Теорема. Пусть точка $M(x_M, y_M, z_M)$ делит отрезок AB в отношении λ , где $A(x_A, y_A, z_A)$ и $B(x_B, y_B, z_B)$, тогда

$$\begin{cases} x_M = \frac{x_A + \lambda x_B}{1 + \lambda}; & y_M = \frac{y_A + \lambda y_B}{1 + \lambda}; & z_M = \frac{z_A + \lambda z_B}{1 + \lambda} \end{cases}$$

Следствие. Если точка M является серединой отрезка AB , то

$$\begin{cases} x_M = \frac{x_A + x_B}{2}; & y_M = \frac{y_A + y_B}{2}; & z_M = \frac{z_A + z_B}{2}. \end{cases}$$

Эти формулы получаются из формул теоремы при $\alpha = \beta = 1$.